

פתרון:

1. נמצא בסיס ל U:

מכאן:

כל x שנבחר יקיים את המשוואה הראשונה. נציב: .  
מכאן: , נציב ונקבל: ולכן: .  
ומכאן: . לכן הפתרונות הם:   
בסיס: בוחרים t שרירותי ומקבלים וקטור בסיס 1: . המימד: 1.

ב. נמצא בסיס ל W:

. ולכן כל וקטור ב W ניתן לייצוג כך ולכן הבסיס הוא: .

המימד הוא 2.

ג. המרחב מייצג את כל הוקטורים שמורכבים מקומבינציית סכום של וקטורים מ U ווקטורים מ W. זה יצא אם כמות הוקטורים של הבסיסים שאינם תלויים ליניארית תהיה בדיוק 3.  
במקרה שלנו נדרוש שיהיו בת"ל.

איך מוכיחים בת"ל? שמים את כל הוקטורים במטריצה, כל וקטור הופך לשורה. אם מדרגים ולא התאפסה שורה אז הם בת"ל. במקרה שלנו לא תתאפס שורה ולכן: .

ד. לא בחומר.

*דטרמיננטה:*

*משפט: מטריצה היא הפיכה אם ורק אם .*

*פתרון מטלה ה'*

1. *נתון ש: הפיכה ולכן:   
   ומכאן: .  
   לכן: ולכן הפיכה.*
2. *נתון: .צ"ל לפי המשפט: . מכאן:*
3. *נתון: . צ"ל: k כך ש:*

*נחשב את הדטרמיננטה של A:*

*לכן המאפסים הם: ולכן כדי ש A תהיה הפיכה נדרוש: .*

*שלב שני: נשווה את הדטרמיננטה שקיבלנו ל*

*לכן:   
ומכאן: . נחלק ונקבל:  
 . נפתח ונקבל: . הפתרונות: .  
1 נפסל כי צריך ש A תהיה הפיכה ולכן ה k היחיד שמקיים את 2 התנאים הוא: .*

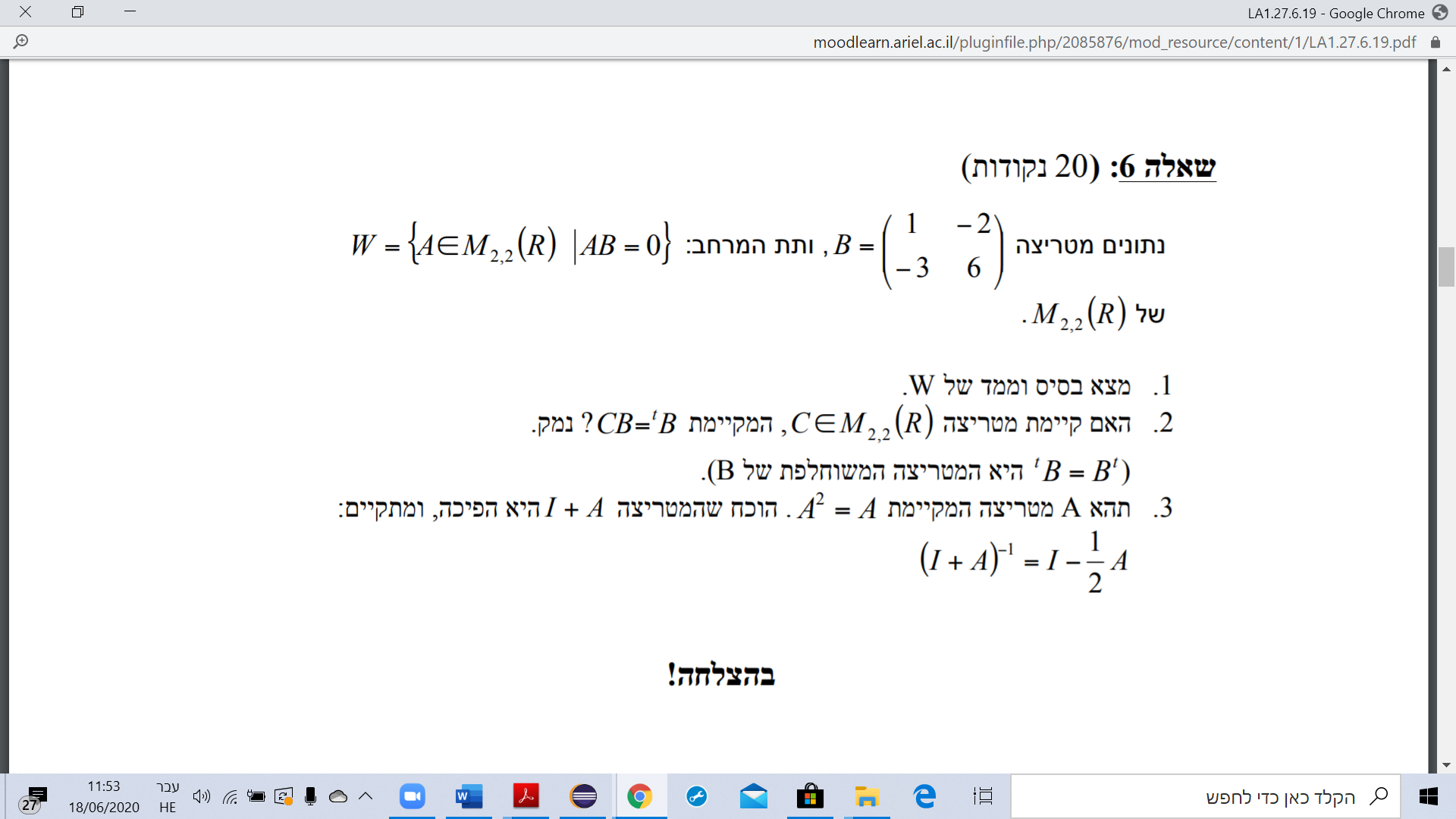
1. *נתון: . ונתון: .  
   הוכיחו: .*

*נחפש את ההופכית של B:*

*מכאן: .*

*נותר: להכפיל ב ולקבל: . מכאן: ניתן לחשב: ואז לחשב את . (להוריד 1 מהאלכסון של A) ולראות שמקבלים תוצאה זהה.*

<https://matrixcalc.org/en/#%7B%7B1,-1,0,3%7D,%7B0,1,0,1%7D,%7B2,1,-1,1%7D,%7B-1,0,1,2%7D%7D%5E%28-1%29>



*פתרון:*

1. *תנאי W: , כלומר:*

*. המטריצה היא:*

*ולכן הבסיס: והמימד הוא*

1. *תנאי: אם קיים פתרון אז יש, אחרת אין.*
2. *נראה ש: .*

*נחשב: .*

*תרגיל: הוכח את משפט המימדים:*

*הוכחה: יהא בסיס עבור .*

*ידוע כי: ולכן:*

*לכן נשלים את לבסיס עבור .   
נגדיר: .*

*נראה ש: הוא בסיס ל: . כי מכאן ינבע:   
ואז:*

*נוכיח תחילה ש B פורש את .  
יהא . מכאן: קיימים: כך ש: .  
מכיוון ש: בסיס ל נובע שקיימים: כך   
ש: .*

*מכיוון ש: בסיס ל נובע שקיימים: כך   
ש: .*

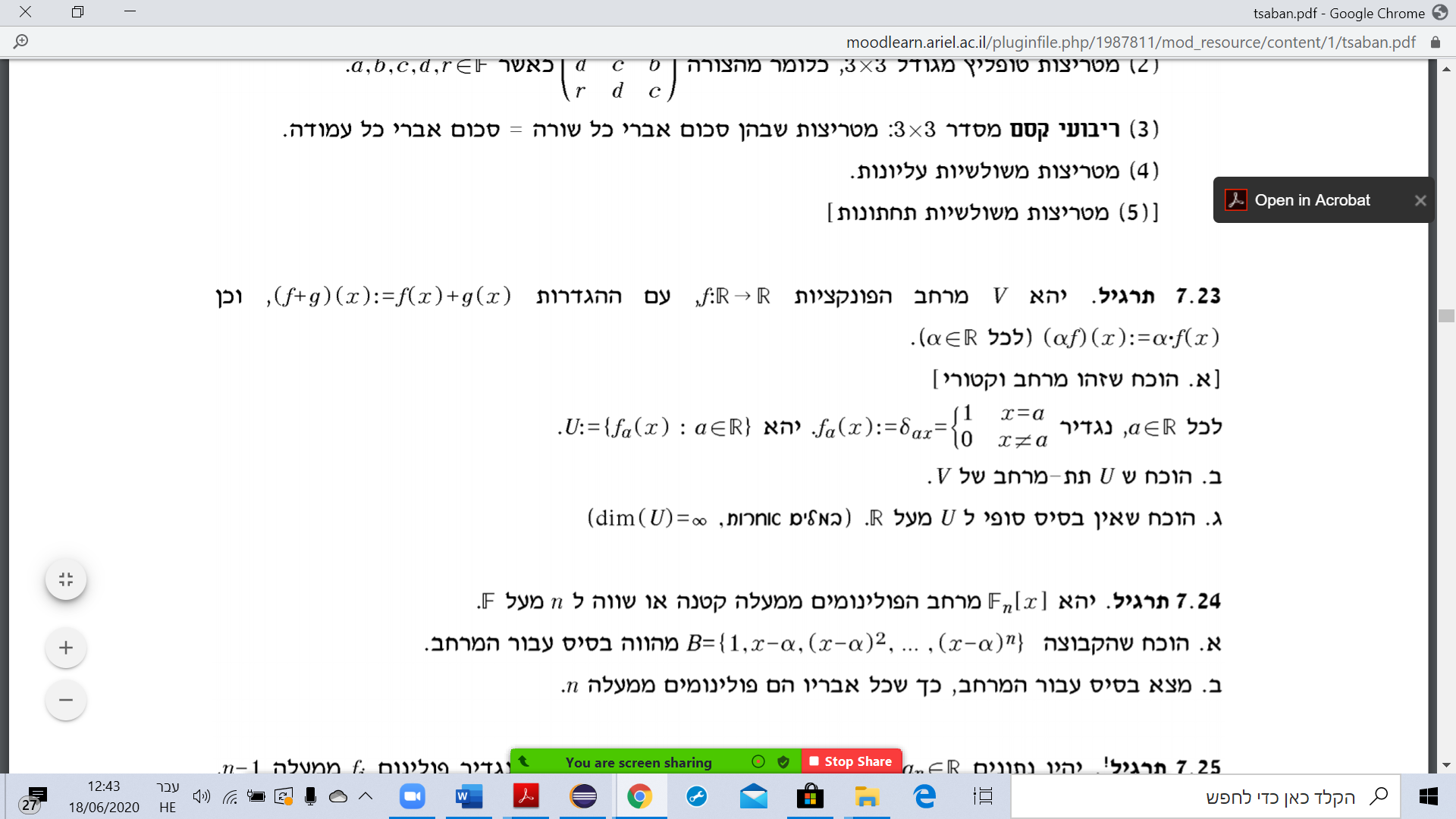
*מכאן:*

*קיבלנו הצגה של ע"י וקטורי הבסיס B. לכן B פורש את .*

*צ"ל: וקטורי B בת"ל.  
נניח ש:   
צ"ל: .  
 (כי ניתן לבחור )  
מכאן: וברור כי: (סגירות לכפל בסקלר) לכן: ולכן קיימים: כך ש: כי הוא בסיס ל . לכל בסיס ולכל וקטור במרחב יש הצגה יחידה בבסיס. ולכן:*

*ומכאן: . נציב ונקבל:   
באופן סימטרי, במקום לדבר על W היינו מדברים על U ומקבלים:*

*קיבלנו סה"כ: ומכיוון ש הוא בסיס, כל הוקטורים שלו (מי שנמצא בשוויון בת"ל) ולכן: . מש"ל.*



*24. א. נראה שהקבוצה פורשת את .  
יהי כלומר: .  
מחפשים: כך ש:*

*נבחר: . כעת, המקדם של הוא בפיתוח של: ובפיתוח של המקדם הוא 1. ולכן: .  
וממשיכים לבנות כך את שאר המקדמים.  
נראה שהקבוצה בת"ל: נניח ש:*

*לא נמצא בצד ימין ולכן בהכרח: . באותו אופן,  
 לא נמצא בצד ימין ולכן בהכרח: .  
וכן הלאה, ולכן כולם 0.*

*ב.*